バーチャルリアリティ

02 基礎知識: 座標系と座標変換(その2)

人間システム工学科 井村 誠孝

m.imura@kwansei.ac.jp

本節の内容

- 回転行列に関する補遺
- 回転(剛体姿勢)の表現について，回転行列以外の表現を確認する．
  - オイラー角
  - クォータニオン

回転行列に関する補遺

回転行列はどのような回転を表しているのか

- 回転行列の基本的な性質: $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \det \mathbf{R} = 1$
- 回転行列の各要素と，対応する余因子の値は等しい
- 回転行列は固有値1を必ず含む

- 固有値1の固有ベクトル $\mathbf{a}$を考えると

$$\mathbf{Ra} = \mathbf{a}$$

回転によって不変なベクトルとは何か?→回転軸

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}$$

→例を見てみる

回転行列以外の姿勢表現手法

- 3次元空間の姿勢を，3×3行列で表現することは，物理的な理解がしやすく数学的にも扱いやすい．
- 欠点として，3自由度である姿勢(回転)を，9変数と6個の拘束条件で表しているため，直接的な設定に手間を要することがある．

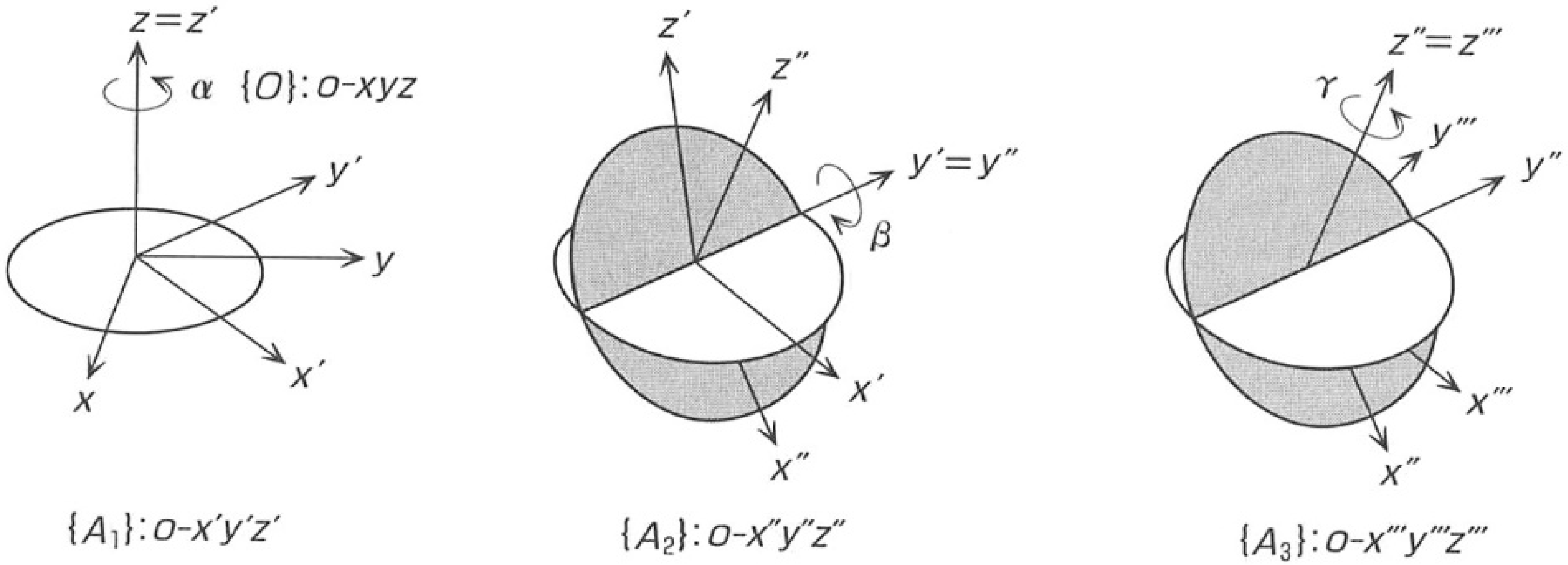
他の手法はないか?

- オイラー角(Euler angles)
- クォータニオン(Quaternion; 四元数)

オイラー角

オイラー角

- 剛体の姿勢を3つの角度で表す方法.
- 座標系を，指定された順番で，座標系の各軸のまわりに回転させることによって姿勢を表現する.
- 例: Z-Y-Z オイラー角
  - Z軸のまわりにα，Y軸のまわりにβ，Z軸のまわりにγ

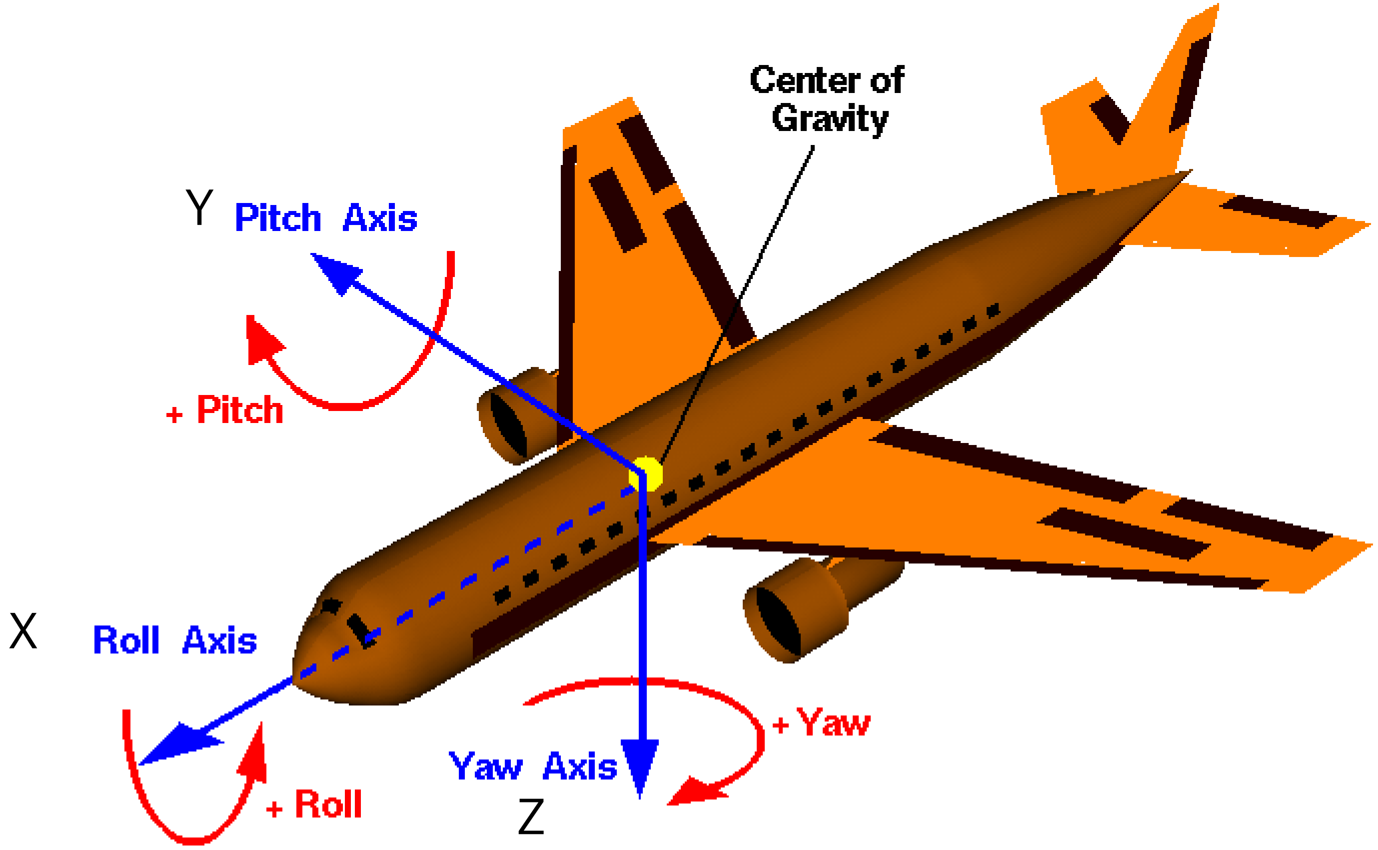


オイラー角は12種類ある

- 3つの座標軸から，同じ軸での回転が連続しないように3軸を順に選ぶ組み合わせの数
- 3軸が異なる
  - X-Y-Z / X-Z-Y / Y-Z-X / Y-X-Z / Z-X-Y / Z-Y-X
- 3軸のうち2軸が同じ
  - X-Y-X / X-Z-X / Y-Z-Y / Y-X-Y / Z-X-Z / Z-Y-Z
- よってオイラー角を使用する場合には，回転軸の順序を必ず確認すること．

Roll-Pitch-Yaw もオイラー角の一種

- 飛行機(=3次元空間内を移動する物体)の姿勢表現



オイラー角による表現の特徴

- 自由度の数と同じ個数(すなわち，最小の個数)である3つの数値で，姿勢を与えることができる．
  - 拘束条件が無い
- オイラー角で姿勢を指定する際には，回転軸の順序も同時に指定する必要がある．
  - 3つの角度だけが決まっていても，回転軸の順序が異なると表している姿勢は異なるものになる． →デモ
    - 行列の積は，順序が変わると結果が変わる(非可換)ことに対応
- オイラー角には，姿勢に対して角度が一意に決まらない特異点が必ず存在する．
  - 1回目の回転軸と3回目の回転軸が平行になり(この現象をジンバルロックと言う)，3変数の間の独立性が失われるため．

特異点はどこにあるか?

- Z-Y-Z オイラー角の場合

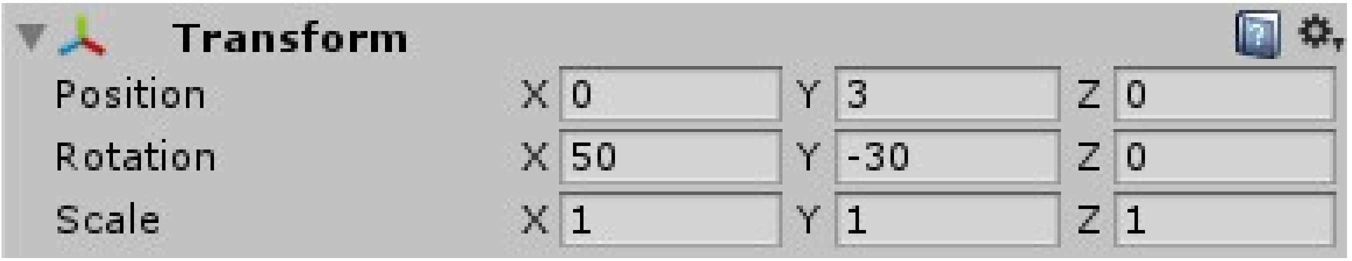
$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}$$

- から α, から β , から γ が求められる.
- $\sin\beta$ が0のとき, α と γ を決めることができない.

UnityのGUIでも使われている

- 人にとって設定が容易であり(これは事実)，最もわかりやすい(ように見える=これが落とし穴)ため，よく使われている．
  - くどいようですが，どの順序で回転しているのか，注意が必要．
    - マニュアルを読むか，自分で調べる．
      - 自分で調べる方法: 数値を変えてみて，その軸まわりの回転がなされれば，その軸の回転が最後に適用されている．



危険な香り

- Unityでは内部的には次に説明するクォータニオンが使われている．

クォータニオン

クォータニオン

- 複素数: $z = a + bi$
- クォータニオン: $q = \boxed{q_0} + \boxed{q_1 i + q_2 j + q_3 k}$

実部
スカラー成分

虚部
ベクトル成分

- 基底元i, j, kの性質

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- 乗算は非可換
- 共役(きょうやく)クォータニオン

$$q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

$$|q|^2 = q^* q = q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2$$

乗算の規則

左＼右	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

クォータニオンと回転

- 回転軸 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$（長さは1とする）まわりの角度 φ の回転を，クォータニオンでは以下のように表現する．

$$q_0 = \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$q_1 = n_x \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$q_2 = n_y \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$q_3 = n_z \sin\frac{\varphi}{2}$$

回転表現に使われるクォータニオンは大きさが1
これをオイラーパラメータと呼ぶ
（まぎらわしいですがオイラー角とは異なるので注意）

クォータニオンと回転行列との関係

- 3自由度の剛体姿勢を4変数で表すため，拘束条件が必要=大きさが1であるという拘束条件を持つ．
- オイラーパラメータ(=大きさ1のクォータニオン)を以下とする．
  - スカラー部: $e_0 = \cos\dfrac{\varphi}{2}$
  - ベクトル部: $\epsilon = \left(n_x \sin\dfrac{\varphi}{2}, n_y \sin\dfrac{\varphi}{2}, n_z \sin\dfrac{\varphi}{2} \right)^T$

$$\mathbf{R} = \left(e_0^2 - \epsilon^T \epsilon\right)\mathbf{E} + 2\epsilon\epsilon^T + 2e_0\left[\epsilon \times\right]$$

E: 単位行列

外積の行列表現

$$\left[\epsilon \times\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - すべてのパラメータの正負を反転しても同じRを与える．

クォータニオンによる表現の特徴

- オイラー角にあるような特異点が無い.
- ある回転行列Rに対して，正負が反転した二つの解を持つが，いずれが適切かは運動の連続性から決定される.
- 拘束条件が1つあるが，大きさを1に正規化すれば満足できる.
  - 数値計算を行う際に逐次的に行うことが容易.
    - 回転行列の正規化には，特異値分解を利用した手法などがあるが，クォータニオンの場合ほど簡単ではない.
- 各成分の値を物理的にわかりやすく解釈することができない.

本節のまとめ

- 剛体姿勢の表現には，3つの方法がある．
- 回転行列
  - 物理的に理解しやすく，数学的にも扱いやすい．
  - 9個の変数に6個の拘束条件があるため，表現が冗長．
- オイラー角
  - 3個の変数で姿勢を表現できる．
  - 特異点がある．
- クォータニオン
  - 4個の変数と1個の適用容易な拘束条件により表され，特異点がない．
  - 物理的な意味の解釈が困難である．